弱分離可能性の検証について

著者	長谷部　正
雑誌名	農業経済研究報告
巻	17
ページ	141-156
発行年	1979-11
URL	http://hdl.handle.net/10097/33321

弱分離可能性の検証について

長谷部　正*

目　次

I　序

企業や家計といった主体の集計と並び，財の集計の問題が，経済学において重要な地位を占めている[1]。この財の集計基準として周知の Hicks の定理がある[2]。彼は，相対価格が何ら変化しない場合には，財の集計が可能であるとする基準を示した。その後，間もなく Hicks の集計定理とは異なり相対価格に直接依存しない財の集計基準が，園（1943）〔23〕らによって提唱された。これが分離可能性（separability）の基準である[3]。さらに日本では安井（1944）〔24〕，岡本・森嶋（1950）〔21〕らによって理論的な検討が加えられたが，実証分析への適用までには致らなかった。

本稿において，我々が議論の対象とするのは，財の集計のうちでも，とりわけ生産要素の集計である。この方面で分離可能性を考慮した実証分析がほとんどなかったのは，分離可能性のなかでも制約のゆるい弱分離可能性をも許容する一般的な関数型が経済学の分野へ導入されなかったためである。ところが，1970年代に入り，Diewert らを中心として，一般的な関数型が，経済の実証分析に適用されるようになると，分離可能性の問題も，改めてクローズ・アップされることとなった[4]。

弱分離可能性を許す一般的な関数としては，トランスログ（Translog）関数がある。このトランスログ関数に関する分離可能性の仮説を検証する試みは，Berndt and Christensen（1973）

---

* 東北大農業経営学研究室・助手

1）岡本・森嶋（1950）〔21〕参照。
2）Hicks（1946）〔15〕参照。
3）分離可能性に関する展望には，Geary and Morishima（1973）〔12〕がある。また，Blackorby et al.（1978）〔7〕は，Geary and Morishima 以降の文献も加えた展望をしている。
4）Diewert（1974）〔9〕参照。最近，Fuss et al.（1978）〔11〕による包括的な展望論文が出た。

〔3〕によって代表される。彼らは，トランスログ生産関数が二次項までのテーラー展開によって生産技術を正確に表現しうる場合の検証方法を提示した。

ところが，最近Denny and Fuss（1977）〔8〕により，BerndtとChristensenの分離可能性の検証方法には難点のあることが指摘された。同時に，従来の方法にかわる新たな分離可能性の検証方法が提唱された。

本稿はトランスログ生産関数の分離可能性に関するBerndtとChristensenの検証方法とDennyとFussの検証方法とを比較検討し，合わせて実証分析への適用を試みることを目的とする。

II　分離可能性の検証

(1) 概　　念

仮に，n個の投入要素が三つのパティションのいずれかに属すと考えよう[5)]。各々を

$$\mathrm{Pr}=\{x_1, x_2, \ldots\ldots x_d\}$$

$$\mathrm{Ps}=\{x_{d+1}, \ldots\ldots\ldots x_h\}$$

$$\mathrm{Pt}=\{x_{h+1}, \ldots\ldots\ldots x_n\}$$

但し，$1<d<h<n$

と表わす。

今，連続微分可能で，擬凹（quasi concave）[6)]な生産関数を

(1)　$q=f(x_1, x_2\ldots\ldots, x_n)$

とする。もし，

(2)　$\dfrac{\partial}{\partial x_h}\left(\dfrac{f_i}{f_j}\right)\equiv 0,\ \text{for all}\ x_i, x_j\in \mathrm{P_v},\ x_h\notin \mathrm{P_v},\ \mathrm{v=r, s, t}$

但し，f_i/f_jは投入要素iとjの限界代替率

なら，生産関数は

(3)　$q=f[\pi(x_1, x_2, \ldots, x_d), \varphi(x_{d+1}, \ldots, x_h), \eta(x_{h+1}, \ldots, x_n)]$

と表わせる[7)]。このとき，生産関数は，弱分離可能（weakly separable）であると言われる。

また，もし

(4)　$\dfrac{\partial}{\partial x_h}\left(\dfrac{f_i}{f_j}\right)\equiv 0,\ \text{for all}\ x_i\in \mathrm{P_v},\ x_j\in \mathrm{P_w},\ x_h\notin\{\mathrm{P_v}\cup \mathrm{P_w}\},\ \mathrm{P_v}\cap \mathrm{P_w}=\phi,\ \mathrm{v, w, =r, s, t}$

なら，

(5)　$q=f[\pi(x_1, x_2, \ldots, x_d)+\varphi(x_{d+1}, \ldots, x_h)+\eta(x_{h+1}, \ldots, x_n)]$

と表わせ[8)]，強分離可能（strongly separable）な生産関数と言われる。π，φ，ηを集計関数（aggregator function）と呼ぼう。

5）単純化の為にパティション3つの場合に限ったが，パティションが多くなっても結論に変りはない。

6）関数$f(x)$は，次の条件を満たす時，擬凹と定義される。

$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geq \mathrm{Min}[f(x_1), f(x_2)],\ 0\leq\lambda\leq 1$

7）Goldman and Uzawa（1964）〔13〕参照。

8）同　上.

分離可能性の概念として，強分離可能は制約の厳しいものである。しかし，従来，生産関数分析に用いられてきたコブダグラス（以下 CD と略す）関数や CES 関数は，関数型のうえから強分離可能な性質を持っている。

弱分離可能を許す生産関数としては，近年多用されるようになったトランスログ（以下 TL と略す）関数がある。これはまた，CD 関数や CES 関数の場合と異なり，各要素の間で，夫々，Allen の代替の偏弾力性が定義出来る。以下では，この弱分離可能性の意味について説明しよう。

弱分離可能であれば，投入要素の集計値が存在する。今，集計に該当しないある投入要素の投入が増えたと想定しよう。この時，定義からもわかるように集計に該当しない投入要素の変化は，集計しようとする投入要素間の限界代替率には何ら影響を及ぼさない。集計しようとする要素が，x_1，x_2 で，集計に直接かかわらない要素が x_3 であるとすれば，弱分離可能性が成立するには，x_1 と x_2 の描く等産出産量曲線は，いかなる性質を有すればよいか。x_3 の増投により，等産出量曲線が，I_1 から I_2 にシフトするものとする。このシフトは，図 1 に示すように I_1 と I_2 が交差するのでは望ましくない。何故なら，交点で x_1 と x_2 の限界代替率が異なるからである。

図 1

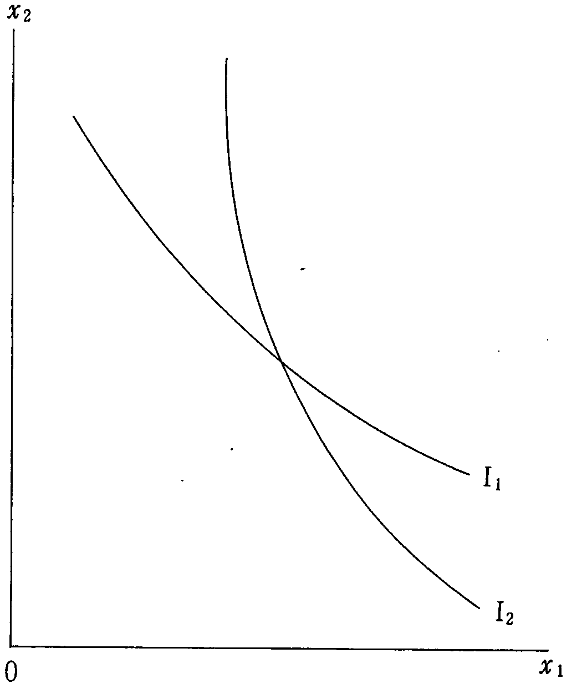
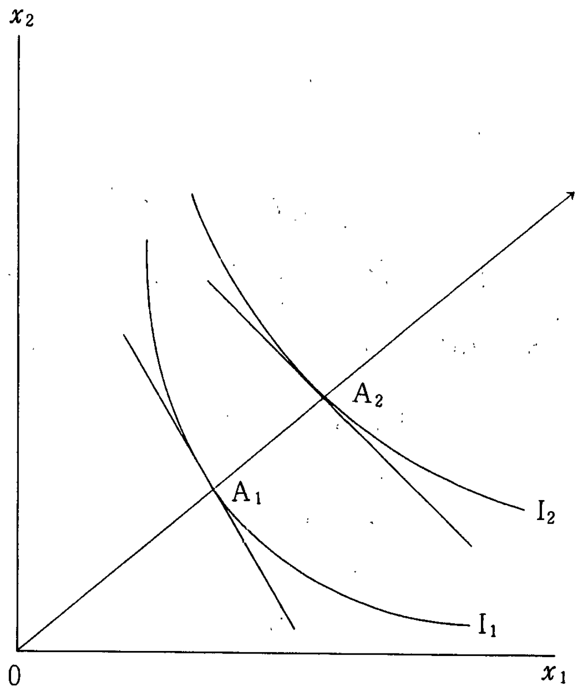


図 2



また x_3 の増投に伴う等産出量曲線のシフトが，図 2 の如く示されるとする。x_1 と x_2 の投入は変化のないまま，I_2 になるとして，x_1 と x_2 の比率が同じ点での限界代替率はどうなるか。図 2 では，点 A_1，A_2 における等産出量曲線の傾きが，夫々の限界代替率を示している。図によると x_3 の増投により限界代替率が変化している。これは，x_1 をより多く，x_2 をより少なく使用するようなシフトになっているからである。以上から，推察しうるように，x_3 の増投が，x_1 と x_2 の限界代替率に影響を与えないためには，等産出量曲線が，相似拡大的（homothetic）

にシフトにすることが望まれる。そして，集計関数が，相似拡大性を有すれば，集計の一致性も得られる[9]。この時，集計値は指数として，径路独立的（path independent）である[10]。さらに，Berndt と Christensen によって示された如く，x_1 と x_3 及び x_2 と x_3 の代替の偏弾力性は等しくなる[11]。

(2)　**Berndt と Christensen の方法**

従来の TL 生産関数の分離可能性の検証方法は，Berndt and Christensen（1973）〔3〕によって代表されるものである。彼らは，TL 生産関数

(6)　$\ell nq = g(\ell n x_1, \ell n x_2, \ldots, \ell n x_n)$

が，二次の項までのテーラー展開によって正確に表現しうるときの分離可能性の条件を示した。

関数 g が，分離可能な条件は，

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial g/\partial x_i}{\partial g/\partial x_j}\right) \equiv 0$$

であるが，g が通常の生産関数の条件を満たせば，

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}\,\frac{\partial^2 g}{\partial x_i\,\partial x_k} - \frac{\partial g}{\partial x_j}\,\frac{\partial^2 g}{\partial x_j\,\partial x_k} = 0$$

or

$$g_i\, g_{ik} - g_j g_{jk} = 0$$

とも表わせる。よって，(6)式の二次の項までテーラー展開を

(7)　$\ell nq = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ell n x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \ell n x_i \ell n x_j$

とすれば，分離可能性の条件は，次式となる。

(8)　$\alpha_i\alpha_{jk} - \alpha_j\alpha_{ik} + \sum_{m=1}^{n}(\alpha_{im}\,\alpha_{jk} - \alpha_{jm}\,\alpha_{ik})\,\ell n x_m = 0$

この式が，常に成立するには

(9)　$\alpha_{ik} = \alpha_{jk} = 0$

であるか，あるいは，

(10)　$\alpha_i\,\alpha_{jk} - \alpha_j\,\alpha_{ik} = 0$

(11)　$\alpha_{im}\,\alpha_{jk} - \alpha_{jm}\,\alpha_{ik} = 0,\ m = 1, 2, \ldots, n$

でなければならない。

Berndt と Christensen に従えば，TL 生産関数において投入要素 i と j が，投入要素 k と分離可能であるための条件は，(9)か，あるいは(10)，(11)のいずれかになる。そして，彼らの示した条件によると，

9）Blackorby et al.（1970）〔5〕参照。
10）拙稿（1979）〔14〕参照。
11）Berndt and Christensen（1973）〔4〕参照。

〔a〕 TL集計値をもとにしたCD生産関数

〔b〕 CD集計値をもとにしたTL生産関数

のいずれかでなければならない事が，Denny and Fuss（1977）〔8〕によって指摘された[12]。

したがって，Berndt と Christensen の分離可能性の検証方法は，生産関数と集計関数のそれぞれに異なった分離可能性を課すことになり，二つの仮説を同時に検証する結果になる。例えば，TL生産関数の弱分離可能性の検証を非線形条件(10)，(11)で行なおうとすると，生産関数に関する弱分離可能性（TL関数）と集計関数に関する強分離可能性（CD関数）の二つの仮説を一度に検証する問題に帰着してしまうのである。

(3) Denny と Fuss の方法

Berndt と Christensen の分離可能性の検証方法は，二つの仮説を同時に検証せざるを得ないという点で制約が厳しすぎる。最近，Denny と Fuss によってこの難点を回避した分離可能性の検証方法が提唱された。彼らは，Berndt と Christensen の場合と異なり，TL生産関数を任意の関数に対する二次項までのテーラー展開による近似であると前提した場合の分離可能性の検証方法を示したのである。

彼らは分離可能性の条件を提示するに先だち，必要な概念の定義と補助定理の証明を行なう[13]。

〔定義1〕

生産関数

$$Q = f(\mathbf{z}) \qquad , \ \mathbf{z} = [z_1, z_2, \ldots, z_n]$$

の二次近似は，次のテーラー展開である。

$$\widehat{Q}(\mathbf{z}) = f(\overset{*}{\mathbf{z}}) + \sum_i^n \left.\frac{\partial f}{\partial z_i}\right|_{\overset{*}{\mathbf{z}}} [z_i - \overset{*}{z_i}] + \frac{1}{2}\sum_i^n\sum_j^n \left.\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\,\partial z_j}\right|_{\overset{*}{\mathbf{z}}} [z_i - \overset{*}{z_i}][z_j - \overset{*}{z_j}]$$

但し，$\overset{*}{\mathbf{z}} = [z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*]$ は展開点である。

〔定義2〕

もし，全ての投入要素ベクトルについて

$$Q = \widehat{Q}(\mathbf{z})$$

なら，$\widehat{Q}(\mathbf{z})$ は正確に生産技術を表わしている。

〔定義3〕

もし，二つの生産関数

$$Q^{(1)} = f^{(2)}(\mathbf{z})$$

$$Q^{(2)} = f^{(2)}(\mathbf{z})$$

の二次近似である $\widehat{Q}^{(1)}(\mathbf{z})$ と $\widehat{Q}^{(2)}(\mathbf{z})$ が，全ての投入要素ベクトルについて等しければ，

12) Blackorby et al.（1977）〔6〕では，より一般的な議論がなされている。

13) Denny and Fuss（1977）〔8〕参照。

これらは，二次近似までは全く同じ基礎に立つ生産技術を表わす。

〔補助定理〕

(7)式で示されるTL関数のパラメーターに対称性の制約を課すと，任意の生産関数

$$\ell n \mathrm{q} = g(\ell n\, x_1, \ell n\, x_2, \cdots\cdots, \ell n\, x_n)$$

に対して，開展点 $\overset{*}{\mathbf{x}} = [x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots, x_n^*] = [1, 1, \ldots\ldots, 1]$ における二次近似となる。

（証明）

まず，

$$\mathrm{Q}(\mathbf{z}) = \ell n \mathrm{q}$$

$$\mathbf{z}_i = \ell n\, x_i,\ i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

$$\alpha_0 = g(\overset{*}{\mathbf{z}})$$

$$\alpha_i = \left.\frac{\partial g}{\partial z_i}\right|_{\overset{*}{\mathbf{z}}},\ i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

$$\alpha_{ij} = \left.\frac{\partial^2 g}{\partial z_i\, \partial z_j}\right|_{\overset{*}{\mathbf{z}}} = \left.\frac{\partial^2 g}{\partial z_j\, \partial z_i}\right|_{\overset{*}{\mathbf{z}}} = \alpha_{ji},\ i, j = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

$$\overset{*}{z_i} = \ell n\ 1 = 0,\ i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

と定義しよう。すると，$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ なる対称性を有する。

$$\widehat{\mathrm{Q}} = \ell n \widehat{\mathrm{q}} = \alpha_0 + \sum_i^n \alpha_i\, \ell n\, x_i + \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n \alpha_{ij}\, \ell n\, x_i\, \ell n\, x_j \tag{13}$$

は，定義1を満たす。（証終）

以上の準備をもとに，Denny と Fuss は，TL生産関数に関する彼らの弱分離可能性の条件を次の定理によって提示する[14)]。

〔定理〕

もし，

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{jk}}$$

なら，(7)式のTL関数は，任意の弱分離可能な生産関数

$$\ell n \mathrm{q} = \mathrm{G}[\pi(\ell n\, x_1, \ell n\, x_2, \ldots\ldots, \ell n\, x_l), \ell n\, x_{l+1}, \ldots\ldots, \ell n\, x_n]$$

に対して二次近似である。

（証明）

弱分離可能な生産関数に関して，点 $\overset{*}{\mathbf{x}} = [1, 1, \ldots\ldots, 1]$ で二次近似を行なうと次のように表わせる。

$$\widehat{\mathrm{Q}}^{(\mathrm{S})} = \gamma_0 + \sum_i^n \gamma_i\, \ell n\, x_i + \frac{1}{2} \sum_i^n \sum_j^n \gamma_{ij}\, \ell n\, x_i\, \ell n\, x_j \tag{14}$$

但し，$\gamma_0 = \mathrm{G}(\overset{*}{\mathbf{x}})$

14）定理の証明はDenny and Fuss（1977）〔8〕による。

$$\gamma_i = \frac{\partial G}{\partial \pi} \frac{\partial \pi}{\partial \ell n\, x_i}\bigg|_{\overset{*}{X}} \quad , i = 1, 2, \ldots\ldots, \ell$$

$$\gamma_k = \frac{\partial G}{\partial \ell n\, x_k}\bigg|_{\overset{*}{X}} \quad , k = \ell + 1, \ldots\ldots, n$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \frac{\partial G}{\partial \pi} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \ell n\, x_i\, \partial \ell n\, x_j} + \frac{\partial \pi}{\partial \ell n\, x_i} \frac{\partial \pi}{\partial \ell n\, x_j} \frac{\partial^2 G}{\partial \pi^2}\bigg|_{\overset{*}{X}}, i, j = 1, 2, \ldots, \ell$$

$$\gamma_{kk} = \frac{\partial^2 G}{\partial \ell n\, x_k^2}\bigg|_{\overset{*}{X}} \quad , k = \ell + 1, \ldots, n$$

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ki} = \frac{\partial \pi}{\partial \ell n\, x_i} \frac{\partial^2 G}{\partial \pi \partial \ell n\, x_k}\bigg|_{\overset{*}{X}}, i = 1, 2, \ldots, \ell ; k = \ell + 1, \ldots, n$$

上記の諸関係より，次式が成立する。

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_j} = \frac{\partial \pi / \partial \ell n\, x_i}{\partial \pi / \partial \ell n\, x_j}\bigg|_{\overset{*}{X}} = \frac{\gamma_{ik}}{\gamma_{jk}}$$

TL 関数(13)に

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{jk}}$$

の制約を課したものは，$\hat{Q}^{(S)}$に等しい。ゆえに，二つの関数は，二次近まで同じ基礎に立つ弱分離可能な生産技術を表わす。（証終）

したがって，Denny と Fuss の TL 関数についての弱分離可能性の検証方法は，先の(10)式で表わせる単一の仮説の検証に帰し，Berndt と Christensen の方法の場合のような困難には遭遇しない。これが，彼らの方法の優れた点である。さらに，彼らの貢献は，前節で示したようにBerndt と Christensen の分離可能性の条件の持つ意味を明らかにした点にもある。ただし，Denny とFuss の提示した弱分離可能性の条件は，あくまでも，テーラー展開する展開点の近傍でのみ成立するということに留意しておかなければならない。これは，Berndt と Christensen の分離可能性の検証方法を単純化するに際し，支払わなければならなかったコストである。

Ⅲ　実証分析

(1)　理論模型

この章では，Denny とFuss によって提唱された分離可能性の新しい検証方法を稲作の付加価値生産関数のケースに適用してみる。

ここで設定される問題は，北海道を除く農区別・経営階層別クロス・セクション・データにもとづいた生産関数において，自作地と小作地が，労働及び資本より弱分離可能であるか，別言すれば，自作地と小作地の集計が可能であるかを検証することである。対象年次は，1975，1977 の両年である。

実証分析にあたり，我々は，佐藤（1975）〔22〕に従い，事前（ex-ante）集計生産関数への近似としてのクロス・セクション生産関数を想定し，そこでの変数の集計問題を考える。

分析に用いるTL付加価値生産関数を定式化しよう。

(15)　$\ell n v = h(\ell n x_1, \ \ell n x_2, \ \ell n x_3, \ \ell n x_4)$

但し，v は稲作の付加価値，

1～4の添字は，自作地，小作地，労働，資本を示す。

この式が，二次項までのテーラー展開によって近似しうるものと仮定すると，

(16)　$$\ell n v = \ell n \delta_0 + \sum_i^4 \delta_i \ell n x_i + \frac{1}{2} \sum_i^4 \sum_j^4 \delta_{ij} \ell n x_i \ell n x_j$$

但し，$\ell n \delta_0$ は零次の定数項，

$$\delta_i = \frac{\partial \ell n v}{\partial \ell n x_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\delta_{ij} = \frac{\partial \ell n v}{\partial \ell n x_i \partial \ell n x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4$$

(16)を $\ell n x_i$ で偏微分すると，

(17)　$$\frac{\partial \ell n v}{\partial \ell n x_i} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x_i} x_i}{v} = \delta_i + \sum_j^4 \delta_{ij} \ell n x_j, \ i = 1, 2, 3, 4$$

農家の利潤極大化行動の成立が保証され，投入要素 i の価格が p_i ならば，

(18)　$$S_i = \frac{p_i x_i}{v} = \delta_i + \sum_j^4 \delta_{ij} \ell n x_j, \ i = 1, 2, 3, 4$$

さらに，付加価値生産関数が，規模に関して収穫一定であれば，付加価値＝総費用で，S_i（$i = 1, 2, 3, 4$）は，コストシェアを表わす。ここで，(18)を投入関数（input function）と呼ぼう[15)]。投入関数の体系は，次の制約条件を持つ。

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \ i, \ j = 1, 2, 3, 4$$

(19)　$$\sum_i^4 \delta_i = 1,$$

$$\sum_i^4 \delta_{ij} = 0, \ j = 1, 2, 3, 4$$

さらに，付加価値生産関数が，弱分離可能，つまり(15)が

(20)　$\ell n v = H[\pi(\ell n x_1, \ell n x_2), \ \ell n x_3, \ \ell n x_4]$

として表わせるには，次の制約条件をも満足しなければならない。

(21)　$\delta_i \delta_{jk} - \delta_j \delta_{ik} = 0, \ i, \ j = 1, 2; k = 3, 4$

実証分析に当っては，(18)の投入関数にかく乱項を導入して

(22)　$$S_i = \delta_i + \frac{1}{2} \sum_j^4 \delta_{ij} \ell n x_j + u_i, \ i = 1, 2, 3, 4$$

の体系を夫々の制約条件のもとで計測する。

我々は，(19)，(21)の制約条件を持った(22)の体系を全ての独立変数が非確率的であり，いわゆる連立

15） Berndt and Christensen（1973）〔3〕参照。

方程式体系とは異なるので「多方程式」体系と呼ぶことにする[16]。

(2) **計測方法**

Denny と Fuss の方法により，TL生産関数の弱分離可能性の検証にあたっては，非線形制約条件のもとで，「多方程式」体系のパラメーターを推定することになる。

本稿において，我々は，Zellner （1962）〔25〕の Efficient Estimator（以下 ZEF と略す）の方法を非線形制約条件付「多方程式」体系の推定の場合に拡張する。

P 本の計測式を行列表記すれば，次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & & & \\ & X_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & X_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_P \end{bmatrix} \tag{23}$$

但し，y_i：T × 1 の従属変数ベクトル

X_i：T × m の独立変数行列

β_i：m × 1 のパラメーターベクトル

U_i：T × 1 のかく乱項ベクトル

(23)式をさらに簡潔にすると，

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{X})\,\boldsymbol{\beta} + \mathbf{U} \tag{24}$$

但し，$\mathbf{I}_T$ は次数 T の単位行列

$\otimes$ はクロネッカー直積

この多方程式体系が，k 個の非線形制約条件を満たさなければならないとしよう。

$$\begin{bmatrix} C_1\ (\mathbf{X};\boldsymbol{\beta}) \\ C_2\ (\mathbf{X};\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ Ck\ (\mathbf{X};\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

但し，$C_i(\mathbf{X};\boldsymbol{\beta})$ は非線形ベクトル関数

この式の左辺をテーラー展開による一次近似として示すと，

16）森口（1974）〔18〕参照。

$$\begin{bmatrix} C_1(\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}) \\ C_2(\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ C_k(\boldsymbol{\beta}+\Delta\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1(\boldsymbol{\beta}) \\ C_2(\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ C_k(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial\beta_1}C_1(\boldsymbol{\beta}) \cdots\cdots \frac{\partial}{\partial\beta_P}C_1(\boldsymbol{\beta}) \\ \frac{\partial}{\partial\beta_1}C_2(\boldsymbol{\beta}) \cdots\cdots \frac{\partial}{\partial\beta_P}C_2(\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial}{\partial\beta_1}C_k(\boldsymbol{\beta}) \cdots\cdots \frac{\partial}{\partial\beta_P}C_k(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\beta_1 \\ \Delta\beta_2 \\ \vdots \\ \Delta\beta_P \end{bmatrix}$$

但し，$\frac{\partial}{\partial\beta_i}C_j(\boldsymbol{\beta})$:$1\times m$のベクトル

$\Delta\beta_i$:$m\times 1$の増分ベクトル

(25)式を書き替え，簡潔に表わすと，

(26) $\mathbf{C}(\beta)+\nabla\mathbf{C}\,\Delta\beta=0$

但し，$\nabla\mathbf{C}$は勾配ベクトル

したがって，問題は，(26)式の制約の下で，

$(\mathbf{e}-\mathbf{Z}\,\Delta\beta)'\,\Omega^{-1}(\mathbf{e}-\mathbf{Z}\,\Delta\beta)$

を最小にする事である。

但し，ここで，

$\mathbf{Z}=\mathbf{I}_T\otimes\mathbf{X}$

$\mathbf{e}=\mathbf{y}-\mathbf{X}\beta$

$$\Omega=\begin{bmatrix} \sigma_{11}I & \sigma_{12}I & \cdots\cdots & \sigma_{1m}I \\ \sigma_{21}I & \sigma_{22}I & \cdots\cdots & \sigma_{2m}I \\ \vdots & \vdots & & \\ \sigma_{m1}I & \sigma_{m2}I & \cdots\cdots & \sigma_{mm}I \end{bmatrix}=\Sigma\otimes\mathbf{I}$$

$\sigma_{PP'}$は，$E(u_{pt}u_{p't'})$を表わす（$p,\ p'=1,\ 2,\ \ldots m;\ t,\ t'=1,\ 2,\ \ldots T$）

Iは，$T\times T$の単位行列である。

ラグランジェ乗数を導入すると，

(27) $\pi=(\mathbf{e}-\mathbf{Z}\,\Delta\beta)'\,\Omega^{-1}(\mathbf{e}-\mathbf{Z}\,\Delta\beta)+2(\mathbf{C}'+\Delta\beta'\,\nabla\mathbf{C}')\lambda$

但し，λ:$k\times 1$ のベクトル

(27)を最小化する一階の条件は，

(28) $\dfrac{\partial\pi}{\partial(\Delta\beta)}=2\,\mathbf{Z}'\,\Omega^{-1}\,\mathbf{Z}\Delta\beta-2\,\mathbf{Z}'\,\Omega^{-1}\,\mathbf{e}+2\,\nabla\mathbf{C}'\,\lambda=0$

$\dfrac{\partial\pi}{\partial\lambda}=2(\mathbf{C}'+\Delta\beta'\,\nabla\mathbf{C}')=0$

整理して行列表記すると，

$$\begin{bmatrix} Z'\Omega^{-1}Z & \nabla C' \\ \nabla C & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'\Omega^{-1}e \\ -C \end{bmatrix} \quad (29)$$

(29)式より，パラメーターの増分ベクトルがもとめられる。パラメーターの初期値にこの増分を加えて，さらに次のステップとして同様の計算を行ない，新たな増分ベクトルをもとめる反復演算を続ける。目的関数の値が最小になる所で，演算を打ち切る。

以上の計測方法を我々は，NZEF（Nonlinear Estimation of Zellner's Efficient Estimator）と呼ぶ。NZEFは，非線形制約の「多方程式」体系を(27)式に変換し，Gauss-Newton 法より，パラメーターをもとめる方法である[17]。

(3) **計測結果**

投入関数体系の計測に用いた資料は，凡て『米生産費調査』によっている。土地は作付面積，労働は自家労働，資本は建物及び農機具の減価償却より成る。土地については，弱分離可能性の検証を通じ，集計の問題を考えるため，自作地と小作地に分けてある。労働投入については，『農村物価賃金統計』の府県別男子農業臨時賃金を平均して得た農区別賃金率（円/day）で，自家労働費をわって求めた[18]。各投入要素のコストシェアは，経営費の総和に占める各要素の経営費の割合である。仮定により，付加価値と経営費の総和は等しい。北海道を除く農区別・階層別のクロス・セクション・データを用いているが，標本数は，小作地が全くないものを除くと，1975，1977の両年とも51個である。

計測結果について記す[19]。各投入関数ごとにOLSを適用してパラメーターを求めた結果が表1である。1975，1977の両年とも，2，3のパラメーターを除き有意な結果を示している。

テーラー展開による二次近似を意味する対称性の制約を課した投入関数体系の計測結果は表2に示した通りである。各パラメーターとも有意な値になっている。対称性の制約について仮説検定をした結果，1975年（$F(3,138) = .976$）については受け入れられたが，1977年（$F(3,138) = 3.406$）については，棄却された。

表3は，1975年について，弱分離可能性の制約を付加して計測した結果である。自作地と小作地が労働及び資本の投入より弱分離可能であるという仮説は，受け入れられた（$F(138, 141) = 1.038$）。つまり，TL付加価値生産関数の下で，自作地と小作地の集計は妥当性を有するという結果がもたらたせたわけである。ちなみに，1975年の自作地代と小作地代とを対数変換して，OLSを適用すると，その係数は，1と有意差がないと結論され

17) Gauss-Newton 法によるNZEFは，(29)式より増分ベクトルを求める算法だが，この算法は発散の可能性がある。そこで，筆者の作成したプログラム（NZEF）では，一応発散を避けるため，増分ベクトルを半減させながら目的関数の最小値を探索する機能を組み込んである。なお，非線形最適化の算法の詳細については，Jacorby et al.（1972）〔16〕参照のこと。

18) 荏開津（1978）〔10〕参照。

19) 計算には，東北大学大型計算機センターのACOS 700を利用した。

表1　OLSの計測結果

	1975 年			1977 年		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
δ_1	.2364(.0137)			.1987(.0112)		
δ_2		.0615(.0063)			.0763(.0059)	
δ_3			.4650(.0116)			.4959(.0113)
δ_{11}	.0883(.0219)			.1089(.0174)		
δ_{12}	−.0201(.0140)			−.0298(.0096)		
δ_{13}	.0681(.0639)			.1234(.0518)		
δ_{21}		−.0192(.0101)			−.0277(.0092)	
δ_{22}		.0375(.0064)			.0480(.0051)	
δ_{23}		.0235(.0293)			.0420(.0274)	
δ_{31}			−.0573(.0186)			−.0771(.0174)
δ_{32}			.0033(.0119)			.0112(.0096)
δ_{33}			.0607(.0542)			−.0016(.0519)
標本数	51	51	51	51	51	51

注1) (1), (2), (3)は，自作地，小作地，労働の投入関数の計測結果を示す。
注2) (　　) 内は，標準誤差

表2　ZEFの計測結果

	1975 年		1977 年	
δ_1	.2241	(.0096)	.1780	(.0076)
δ_2	.0595	(.0048)	.0731	(.0043)
δ_3	.4745	(.0087)	.5107	(.0085)
δ_4	.2418	(.0071)	.2383	(.0081)
δ_{11}	.0670	(.0125)	.0739	(.0097)
δ_{12}	− .0241	(.0067)	− .0358	(.0050)
δ_{13}	− .0387	(.0096)	− .0442	(.0096)
δ_{14}	− .0041	(.0098)	.0061	(.0120)
δ_{22}	.0374	(.0047)	.0480	(.0034)
δ_{23}	.0055	(.0056)	.0129	(.0053)
δ_{24}	− .0188	(.0061)	− .0250	(.0063)
δ_{33}	.1441	(.0227)	.1267	(.0274)
δ_{34}	− .1109	(.0276)	− .0955	(.0345)
δ_{44}	.1338	(.0335)	.1143	(.0428)
標本数	153		153	

注) (　　) 内は，漸近的標準誤差

表3　NZEFの計測結果

	1975年	
δ_1	.2259	(.0100)
δ_2	.0575	(.0049)
δ_3	.4689	(.0090)
δ_4	.2478	(.0069)
δ_{11}	.0687	(.0077)
δ_{12}	−.0228	(.0043)
δ_{13}	−.0247	(.0074)
δ_{14}	−.0212	(.0069)
δ_{22}	.0345	(.0043)
δ_{23}	−.0063	(.0019)
δ_{24}	−.0054	(.0017)
δ_{33}	.1270	(.0238)
δ_{34}	−.0960	(.0284)
δ_{44}	.1225	(.0350)
標本数	153	

注）(　　) 内は，漸近的標準誤差

た。Hicksの集計基準が成立するケースである。

ところで，弱分離可能性の制約を課して，Allenの代替の偏弾力性を計算したのが，表4である。すでに言及した如く，弱分離可能性が成立するため，自作地及び小作地と他の投入要素の弾力性は等しい。代替の偏弾力性(σ_{ij}, i, j=1, 2, 3, 4) の大きさの順は，

$$\sigma_{34} > \sigma_{13} = \sigma_{23} > \sigma_{14} = \sigma_{24}$$

資本と労働，とりわけ，農機具と労働の著しい代替は，阿部（1978）〔1〕やLee（1978）〔17〕によっても指摘されている。また，資本と土地の代替しやすい点はLeeの結果と類似している。この点阿部の結果が異なるのは，タイム・シリーズのデータを用いてるためと思われる。換言すれば，我々の生産関数は，事前的生産関数への近似であるので，要素間の代替が大きくなっているのであろう。

ところで，各結果の決定係数は，表5に見るように決して高くはない。とりわけ，自作地の投入関数のR^2は，いずれの場合もかなり低い。これらは，今回の計測において，階層性や地域性を模型の中に組み込んでいないことに帰因していると思われる。今後の課題としたい。

表4　Allenの代替の偏弾力性

	自作地	小作地	労　働
小作地	8.278		
労　働	1.182	1.182	
資　本	1.825	1.825	3.820

注）展開点における値である。

表5　各投入関数の決定係数の比較

	1975年			1977年		
	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
OLS	.32	.59	.53	.47	.74	.53
ZEF	.27	.59	.50	.34	.74	.46
NZEF	.28	.58	.49	—	—	—

注）表1の注1に同じ。

Ⅳ 結

本稿では，まず弱分離可能性の意味を明らかにした後，その検証方法に検討を加えた。

Berndt と Christensen らによる従来の分離可能性の検証方法では，TL 生産関数が二次項までのテーラー展開によって生産技術を正確に表わしうると想定している。彼らの方法によると，生産関数と集計関数に異なった分離可能性の制約を課すので，二つの仮説を同時に検証しなければならないという難点を持っている。つまり，Berndt と Christensen の方法に従うと，TL 集計値をもとにした CD 生産関数であるか，CD 集計値をもとにした TL 生産関数のいずれかでなければならない。

これに対して，Denny と Fuss の提示した新しい分離可能性の検証方法では，TL 生産関数が二次項までのテーラー展開により近似的に生産技術を表わすと想定している。Denny と Fuss の方法によれば，TL 集計による TL 生産関数が定式化できる為，生産関数と集計関数に異なった分離可能性の条件を課すことはない。仮説の検証という面からみると，Denny と Fuss の新しい方法の方が，優れている。ただし，彼らの方法と言えども問題がないわけではない。Denny と Fuss の提示した方法は，あくまでもテーラー展開を行なうその展開点の近傍でのみ成立するものである。つまり，分離可能性に関し，Berndt と Christensen の場合は，大域的な（global）概念であるのに対し，Denny と Fuss の場合は，小域的な（local）概念という制約がある。これは，仮説検証の単純化の為に支払わねばならなかったコストである。

次に，Denny と Fuss による新しい弱分離可能性の検証方法を実証分析に適用してみた。弱分離可能性の検証には，稲作の付加価値生産関数を利用したが，実際の分析には，農家の利潤極大化行動を前提として，投入関数の体系を導出し，それを計測するという過程をとった。

Denny と Fuss の方法といえども，弱分離可能性の条件は，非線形となる。そこで，非線形の制約条件を持つ「多方程式」体系の計測を可能とする NZEF を定式化した。

以上の準備をもとに，Denny と Fuss の方法により自作地と小作地とが，労働と資本より弱分離可能であるという仮説の検証を試みた。その結果，TL 生産関数の定式化の下で，自作地と小作地の集計は妥当であることが明らかにされた。

参 考 文 献

〔1〕阿部順一「生産要素代替の偏弾力性」工藤元先生退官記念出版企画委員会編『近代農業経営学の理論と応用』，明文書房，1978，pp. 248－263

〔2〕Allen, R.G.D., *Mathematical Analysis for Economists*, Macmillan, 1956

〔3〕Berndt, E.R. and Christensen, L.R.,"The Translog Function and the Substitution of Equipment, Structures, and Labor in U.S. Manufacturing 1929－68", *Journal of Econometrics*, Vol. 1, 1973, pp. 81－113

〔4〕——, ——,"The Internal Structure of Functional Relationships: Separability, Substitution, and Aggregation", *Review of Economic Studies*, Vol. 40, 1973, pp. 403－410

〔5〕 Blackorby, C., Lady, G., Nissen, D. and Russell, R.R., " Homothetic Separability and Consumer Budgeting", *Econometrica*, Vol. 38, 1970, pp. 469－472

〔6〕 Blackorby, C., Primont, D. and Russell, R.R., " On Testing Separability Restrictions with Flexible Functional Forms", *Journal of Econometrics*, Vol. 5, 1977, pp. 195－209

〔7〕 ——, ——, ——, *Duality, Separability, and Functional Struture: Theory and Economic Applications*, North Holland, 1978

〔8〕 Denny, M. and Fuss, M., "The Use of Approximate Analysis to Tests for Separability and the Existence of Consistent Aggregates", *A. E. R.*, Vol. 67, 1977, pp. 404－418

〔9〕 Diewert, W.E., " Applications of Duality Theory", in *Frontiers of Quantitative Economics*, Vol. II, ed. by Intriligator M.D. and Kendrick, D.A., North Holland, 1974, pp. 106－171

〔10〕 荏開津典生「農家の農業投資」加藤譲・荏開津典生編『インフレーションと日本農業』東大出版会, 1978, pp. 307－324

〔11〕 Fuss, M., McFadden, D., and Mundlak, Y. " A Survey of Functional Forms in the Economic Analysis of Production", in *Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications*, Vol. I, ed. by Fuss, M. and McFadden, D., North Holland, 1978, pp. 219－268

〔12〕 Geary, P.T. and Morishima, M., " Demand and Supply under Separability", in *The Theory of Demand: Real and Monetary* by Morishima, M. and others, Clarendon Press, 1973, pp. 87－147

〔13〕 Goldman, S.M. and Uzawa, H., " A Note on Separability in Demand Analysis", *Econometrica*, Vol. 32, 1964, pp. 387－398

〔14〕 長谷部正「ディヴィジア指数とその適用」『農業経済研究報告』, 第16号, 1979, pp. 1－11

〔15〕 Hicks, J.R., *Value and Capital*, second edition, Clarendon Press, 1946

〔16〕 Jacorby, S.L.S., Kowalik, J.S. and Pizzo. J.T., *Iterative Methods for Nonlinear Optimization Problems*, Prentice－Hall, 1972（関根智明訳『非線形最適化問題の反復解法』培風館, 1976）

〔17〕 Lee, J.H., " Factor Relationship in Postwar Japanese Agriculture: Application of Ridge Regression to Translog Production Function", Unpublished paper, Faculty of Agriculture, Hokkaido University, 1978

〔18〕 森口親司『計量経済学』岩波書店, 1974, pp. 178－182

〔19〕 農林省統計情報部『米及び麦類の生産費』1976, 1978

〔20〕 ——，『農林物価賃金統計』1976

〔21〕 岡本哲治・森嶋通夫「商品群の理論と企業の理論」『季刊理論経済学』，第 1 巻，1950，pp. 348－357

〔22〕 佐藤和夫『生産関数の理論』 創文社， 1975， pp. 125－136

〔23〕 園正造「価格変動に伴う分離可能財の需給変動」『国民経済雑誌』， 第74巻， 1943， pp. 261－331

〔24〕 安井琢磨「スルツキイ理論における分離性の思想と同次性の仮定」 神戸商大新聞部編『経済及経済学の再出発』 日本評論社， 1944（安井琢磨著作者集第Ⅱ巻，創文社，1970に再録）

〔25〕 Zellner, A., " An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 57, 1962, pp. 348－368